الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب التمارين

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   أ.د. محمد صبح صبابحه   يوسف سليمان جرادات

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2022/7)، تاريخ 2022/11/8 م، وقـرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2022/108)، تاريـخ 2022/12/6 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 421 - 7

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/798)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتـاب التماريـن: الصـف الثانـي عشـر الفـرع العلمـي: الفصـل الدراسـي الثانـي/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.– عمّـان: المركـز، 2023

(41) ص.

ر.إ.: 2023/2/798

الواصفات:/ الرياضيات/ / التمارين/ / أساليب التدريس/ / التعليم الثانوي/

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1443 هـ / 2022 م

أعيدت طباعته 1444 هـ / 2023 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 4 التكامل

قائمة المحتويات

الوحدة 5 المتجهات

الوحدة 6 الإحصاء والاحتمالات

الوحدة 4: التكامل

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد تكاملات غير محدودة لاقترانات القوّة

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 3x^2\,dx$

2) $\int (2 + x^3 + 5x^{-2})\,dx$

3) $\int \left(2x^7 - \frac{4}{x^4}\right) dx$

4) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

5) $\int x(4x^3 - 4x + 1)\,dx$

6) $\int \left(\frac{x^3 + 7x - 2x^2}{x}\right) dx$

7) $\int (x-1)(x+3)\,dx$

8) $\int (2x+5)^5\,dx$

9) $\int \frac{x^2 - 1}{x+1}\,dx$

مثال: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (8x^3 - 3x + 1)\,dx$

$$\int (8x^3 - 3x + 1)\,dx = \frac{8}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= 2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$ بالتبسيط

b) $\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\,dx$

$$\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\,dx = \int \left(\frac{x^7}{2x} - \frac{4x^3}{2x} + \frac{8x}{2x}\right) dx$$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int \left(\frac{1}{2}x^6 - 2x^2 + 4\right) dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{14}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + 4x + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

c) $\int (\sqrt{x} + 1)\,dx$

$$\int (\sqrt{x} + 1)\,dx = (x^{1/2} + 1)\,dx$$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + x + C$$ تكامل اقتران القوّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + C$$ الصورة الجذرية

الوحدة 4: التكامل

إيجاد تكاملات محدودة لاقترانات القوَّة

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

12 $\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\, dx$

11 $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3}+3x\right) dx$

10 $\int_{-2}^3 x^5\, dx$

مثال: أجد قيمة: $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+4\right) dx$.

تعريف الأُسِّ السالب
$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+4\right) dx = \int_1^2 (x^{-2}+4)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت
$$= (-x^{-1}+4x)\Big|_1^2$$

تعريف الأُسِّ السالب
$$= \left(-\frac{1}{x}+4x\right)\Big|_1^2$$

بالتعويض
$$= \left(-\frac{1}{2}+4(2)\right)-\left(-\frac{1}{1}+4(1)\right)$$

بالتبسيط
$$= 4\frac{1}{2}$$

إيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشتقته ونقطة تحقُّقه (الشرط الأوَّلي)

13 أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = x^2+1$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(0, 8)$.

مثال: أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = x-3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 9)$.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$f(x) = \int f'(x)\, dx$
$$f(x) = \int (x-3)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

بتعويض $x = 2, f(2) = 9$
$$9 = \frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + C$$

بحلِّ المعادلة لـ C
$$C = 13$$

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$.

الوحدة 4: التكامل

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x

14 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^2 - x^3$، والمحور x.

15 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x + 12$، والمحور x.

16 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$، والمحور x.

مثال:

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 1$.

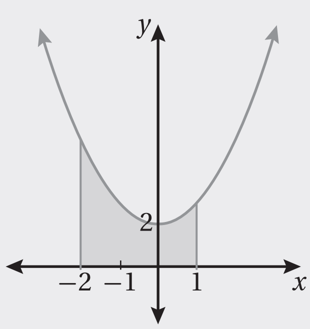
الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة $[-2, 1]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ بمساواة الاقتران بالصفر

$x^2 + 2 = 0$ بتعويض $f(x) = x^2 + 2$

بما أنَّ $x^2 + 2 \neq 0$، فإنَّ منحنى الاقتران لا يتقاطع مع المحور x كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع فوق المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد مساحتها كالآتي:

$A = \int_a^b f(x)\, dx$ قانون المساحة التي تنحصر بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أعلى المحور x

$= \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)\, dx$ بالتعويض $f(x) = x^2 + 2, a = -2, b = 1$

$= \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-2}^{1}$ تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$= \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)\right)$ بالتعويض

$= 9$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: 9 وحدات مربعة.

b) أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2}{x^2} - 3$، والمحور x، والمســتقيمين: $x = 4$، و $x = 2$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

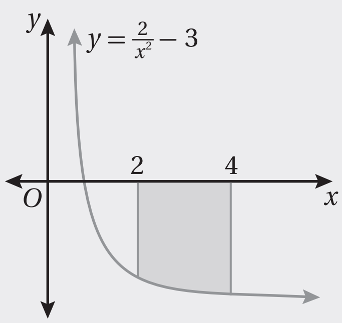
لإيجــاد الإحداثي x لنقاط تقاطــع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة $[2, 4]$، أُســاوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0$$ بمساواة الاقتران بالصفر

$$\frac{2}{x^2} - 3 = 0$$ بتعويض $f(x) = \frac{2}{x^2} - 3$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

إذن، الإحداثــي x لنقطتي تقاطع الاقتــران $f(x)$ مع المحور x ليس ضمن الفترة المعطاة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع أسفل المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد مساحتها كالآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$ قانون المساحة التي تنحصر بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل المحور x

$$= -\int_2^4 \left(\frac{2}{x^2} - 3\right) dx$$ بالتعويض $f(x) = \frac{2}{x^2} - 3, a = 2, b = 4$

$$= -\int_2^4 (2x^{-2} - 3)\, dx$$ تعريف الأُسِّ السالب

$$= -(-2x^{-1} - 3x)\Big|_2^4$$ تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= -\left(-\frac{2}{x} - 3x\right)\Big|_2^4$$ تعريف الأُسِّ السالب

$$= \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\Big|_2^4$$ بالتبسيط

$$= \frac{2}{4} + 3(4) - \left(\frac{2}{2} + 3(2)\right)$$ بالتعويض

$$= 5.5$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: 5.5 وحدة مربعة.

c) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 - x^2 + 6x$، والمحور x.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة الاقتران بالصفر $\quad f(x) = 0$

بتعويض $f(x) = -x^3 - x^2 + 6x$ $\quad -x^3 - x^2 + 6x = 0$

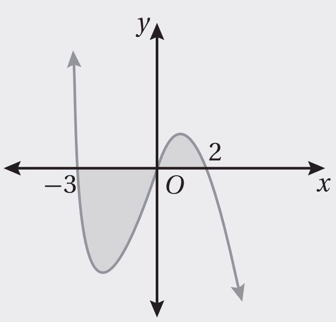
بالتحليل إلى العوامل الأوَّلية $\quad x(x+3)(x-2) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\quad x = 0 \quad \text{or} \quad x + 3 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$

بحلِّ كل معادلة لـ x $\quad x = 0 \qquad x = -3 \qquad x = 2$

إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع الاقتران $f(x)$ مع المحور x هو:

$x = -3, 0, 2$ كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر المتبقي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$A = -\int_{-3}^{0} (-x^3 - x^2 + 6x)\, dx + \int_{0}^{2} (-x^3 - x^2 + 6x)\, dx$$

قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، والجمع

$$= -\left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

بالتعويض

$$= -\left((0) - \left(-\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3)^2\right)\right) + \left(-\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 - 0\right)$$

بالتبسيط

$$= 21.08$$

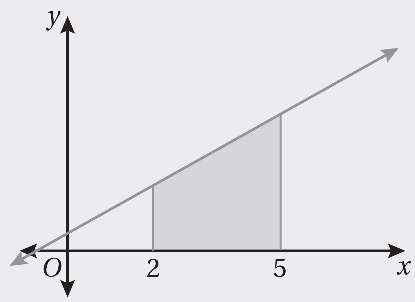
إذن، المساحة هي: 21.08 وحدة مربعة.

• إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران منحنى اقتران حول المحور x

17 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^{1/3}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 8$ حول المحور x.

مثال: **أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 2x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 2$، و $x = 5$ دورة كاملة حول المحور x.**

يُمثِّل الشكل الآتي المنطقة التي سيتمُّ تدويرها حول المحور x.



أجد حجم المُجسَّم الناتج عن طريق التكامل.

قاعدة حجم المُجسَّم الناتج من الدوران حول المحور x

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

بتعويض $f(x) = 2x + 3, a = 2, b = 5$

$$= \pi \int_2^5 (2x + 3)^2 \, dx$$

تكامل $(ax + b)^n$

$$= \frac{\pi}{3 \times 2} (2x + 3)^3 \Big|_2^5$$

بالتعويض

$$= \frac{\pi}{6} \left((2(5)+3)^3 - (2(2)+3)^3\right)$$

بالتبسيط

$$= 309\pi$$

إذن، حجم المُجسَّم الناتج هو 309π وحدة مكعبة.

الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 4e^{-5x}\,dx$

2 $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

3 $\int \cos^2 2x\,dx$

4 $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx$

5 $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x\right) dx$

6 $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$

7 $\int \cos x\,(1 + \csc^2 x)\,dx$

8 $\int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2}\,dx$

9 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

10 $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

11 $\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2}\,dx$

12 $\int \ln e^{\cos x}\,dx$

13 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

14 $\int \frac{3}{2x - 1}\,dx$

15 $\int \frac{3 - 2\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4}\,dx$

17 $\int_1^2 \frac{dx}{3x - 2}$

18 $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos x\,dx$

19 $\int_{-1}^1 |3x - 2|\,dx$

20 $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3\sin x)^2\,dx$

21 $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

22 $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x)\,dx$

23 $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx$

24 $\int_0^1 \frac{6x}{3x + 2}\,dx$

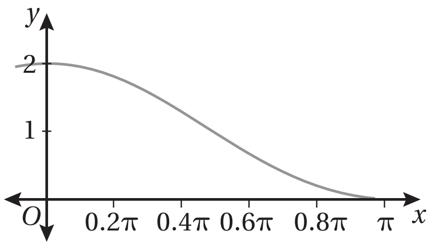
25 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x \leq 3 \\ 10 - x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x)\,dx$.

26 إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x - 1}\,dx = 1$، فأجد قيمة الثابت k، حيث: $k > \frac{1}{2}$.

27 إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

28 يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = 2\cos^2 0.5x$.
أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحورين الإحداثيين الموجبين.



في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

29 $f'(x) = e^{-x} + x^2 \,;\, (0, 4)$

30 $f'(x) = \frac{3}{x} - 4 \,;\, (1, 0)$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

31 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

32 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 6\sin 3t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

33 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

34 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

35 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & , 0 \le t \le 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t & , t > 6 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بَدْء الحركة.

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

2 $\displaystyle\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$

3 $\displaystyle\int \csc^5 x \cos^3 x\,dx$

4 $\displaystyle\int x \sin x^2\,dx$

5 $\displaystyle\int x^3 (x+2)^7\,dx$

6 $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

7 $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

8 $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\ln 4x^2\right)}{x}\,dx$

9 $\displaystyle\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10 $\displaystyle\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

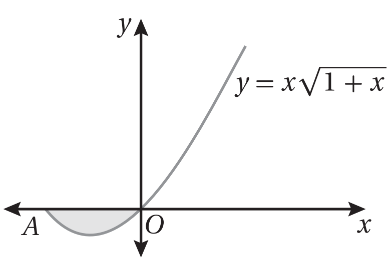
11 $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$

12 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$

13 $\displaystyle\int_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

14 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

15 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$



16 يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{x+1}$.
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في هذا الشكل.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

17 $f'(x) = 16\sin x \cos^3 x\,;\ \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

18 $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,;\ (2, 1)$

19 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

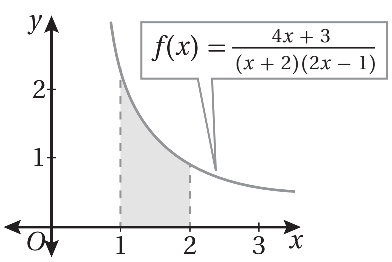
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

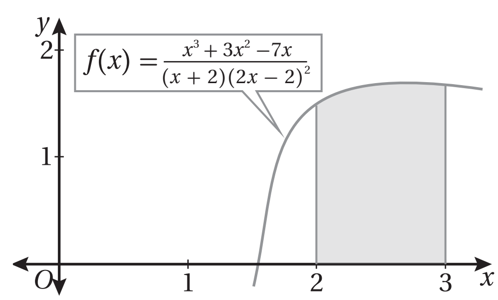
1. $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx$
2. $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$
3. $\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx$
4. $\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$
5. $\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx$
6. $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx$
7. $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$
8. $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$
9. $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10. $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$
11. $\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx$
12. $\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx$
13. $\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$
14. $\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx$
15. $\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

16. 

17. 

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

18. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx$
19. $\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x+3\sin x-4}\,dx$
20. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x+5\tan x+6}\,dx$

21. أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$.

22. أُثبِت أنَّ: $\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$، حيث: $p > 1$.

التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x \cos 4x \, dx$

2 $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

3 $\int xe^{-x} \, dx$

4 $\int (x^2+1) \ln x \, dx$

5 $\int \ln x^3 \, dx$

6 $\int e^{2x} \sin x \, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7 $\int_1^e \ln x \, dx$

8 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

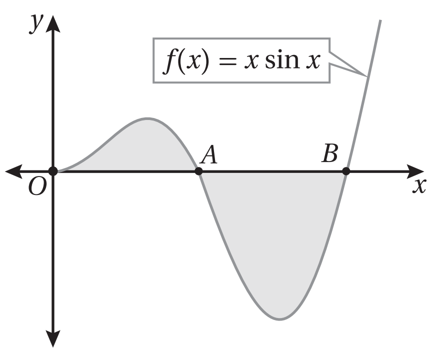
9 $\int_0^\pi x \cos \frac{1}{4} x \, dx$

10 $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \cos 2x \, dx$

11 $\int_1^e \ln (x+1) \, dx$

12 $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

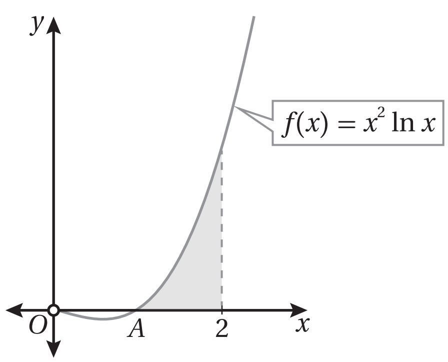
13 أُثبِت أنَّ: $\int_2^4 \ln x \, dx = 6 \ln 2 - 2$.



إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x \sin x$، حيث: $x \geq 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

14 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

15 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.



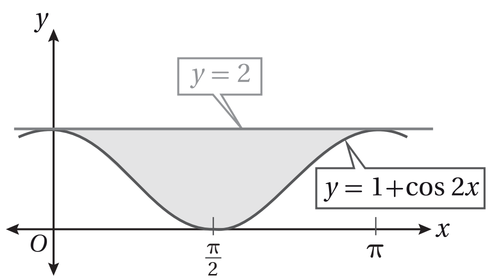
إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

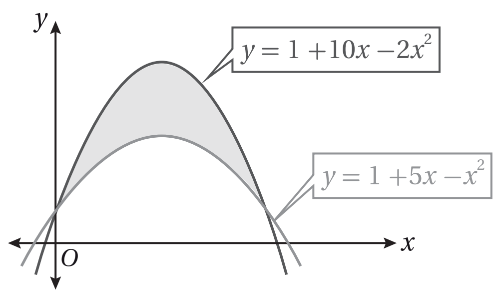
16 أجد إحداثيي النقطة A.

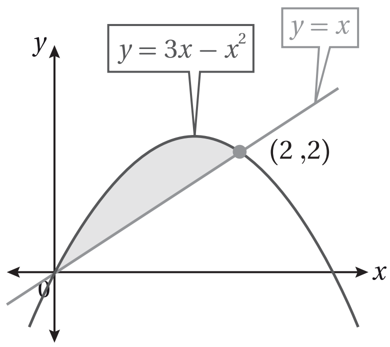
17 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

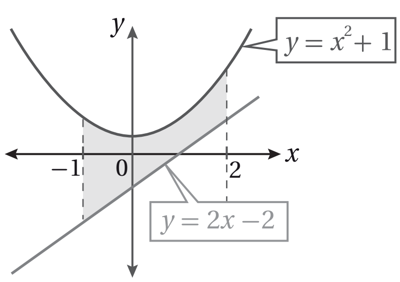
المساحات والحجوم
Areas and Volumes

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

1 

2 

3 

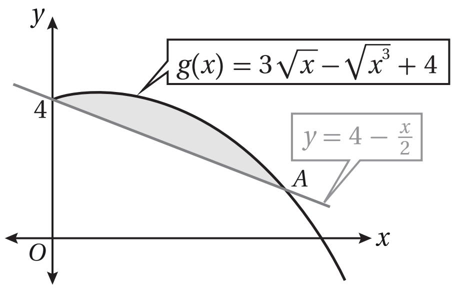
4 

5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$، و $g(x) = 2-x$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{x}$، و $g(x) = \frac{1}{x^2}$، والمستقيم $x = 2$.

7 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $g(x) = 1-\cos x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \pi$.

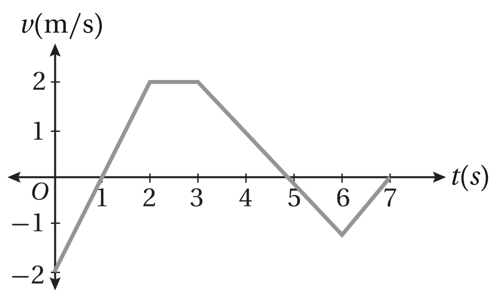
يُبيِّن الشــكل المجــاور منحنى الاقتــران: $g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$، والمســتقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



8 أجد إحداثيي النقطة A.

9 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

المساحات والحجوم
Areas and Volumes

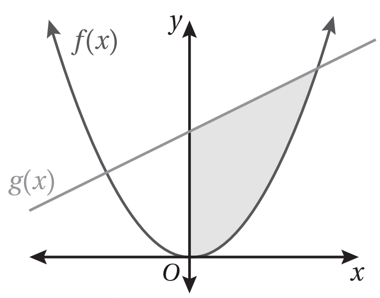


يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 7]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

11 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

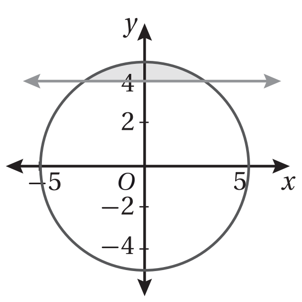
12 الموقع النهائي للجُسَيْم.



13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$، و $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.
أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

14 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\ln x}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = e$، و $x = e^3$ حول المحور x.

15 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{8x}$، و $g(x) = x^2$ حول المحور x.



16 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور دائرة معادلتها: $x^2 + y^2 = 25$. إذا دار الجزء المُظلَّل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y = 4$ حول المحور x لتشكيل مُجسَّم، فأجد حجم المُجسَّم الناتج، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 6

المعادلات التفاضلية
Differential Equations

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x}$
3. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y e^{x^2}}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3}{y}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

7. $\frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \ \sin 4x \,; y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$
8. $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y} \,; y(0) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y} \,; y(0) = 0$
10. $\frac{dy}{dx} = x\, e^{y - x^2} \,; y(1) = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = xe^{-y},\ y(4) = \ln 2$
12. $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2 \,; y(2) = -0.1$

بكتيريا: يتغيَّر عدد الخلايا البكتيرية في مجتمع بكتيري بمُعـدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\, y^{0.8}$، حيث y عدد الخلايا، و t الزمن بالأيام:

13. أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد t يومًا، علمًا بأنَّ عددها الابتدائي هو 100000 خلية.

14. أجد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد أسبوع.

15. تتحرَّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}\,,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها بالمتر لكل ثانية. أجد سرعة السيّارة بعد t ثانية من بَدْء حركتها، علمًا بأنَّ سرعتها الابتدائية هي 20 m/s.

16. تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $e^y \frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

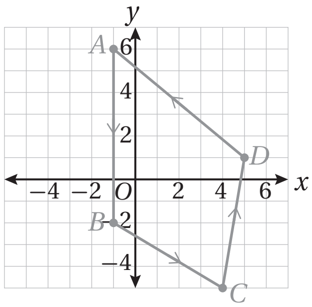
17. تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(6, 4)$.

الوحدة 5: المتجهات

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

الصورة الإحداثية، ومقدار المتجه

مُعتمِدًا الشكل المجاور، أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقدار كلٍّ منها:



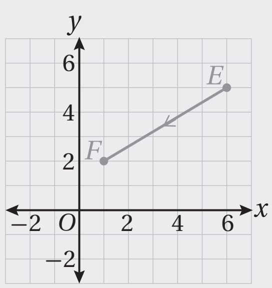
1 $\overrightarrow{AB}$

2 $\overrightarrow{BC}$

3 $\overrightarrow{CD}$

4 $\overrightarrow{DA}$

مثال: مُعتمِدًا الشكل المجاور، أكتب المتجه $\overrightarrow{EF}$ بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.



نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{EF}$ هي: $E(6, 5)$، ونقطة نهايته هي: $F(1, 2)$.

وبذلك، فإنَّ:

المركبة الأفقية $x_2 - x_1 = 1 - 6 = -5$

المركبة العمودية $y_2 - y_1 = 2 - 5 = -3$

الصورة الإحداثية $\overrightarrow{EF} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$

بالتعويض $\overrightarrow{EF} = \langle -5, -3 \rangle$

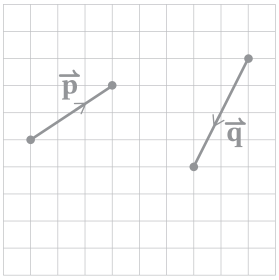
صيغة مقدار المتجه $\vec{\mathbf{v}} = \langle a_1 , a_2 \rangle$ $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$

بالتعويض $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{34}$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا

مُعتمِدًا الشكل المجاور، أُمثِّل كُلًّا ممّا يأتي هندسيًّا:



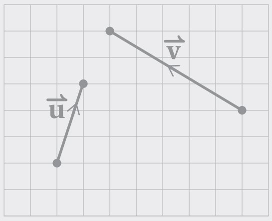
5 $2\vec{\mathbf{p}}$

6 $-\frac{1}{2}\vec{\mathbf{q}}$

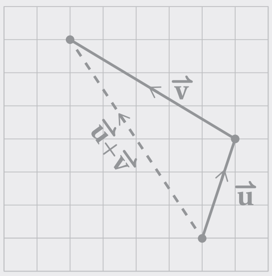
7 $3\vec{\mathbf{p}} + 2\vec{\mathbf{q}}$

8 $2\vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{p}}$

مثال: مُعتمِدًا الشكل المجاور، أُمثِّل كُلًّا ممّا يأتي هندسيًّا:

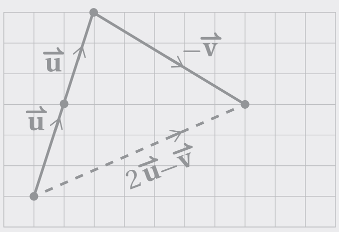


1) $\vec{u}+\vec{v}$



أسـحب المتجه $\vec{u}$ سـت وحدات إلى اليمين، ووحدة واحدة إلى الأسفل، بحيث تنطبق نقطة نهايته على نقطة بداية المتجه $\vec{v}$، ثم أرسـم سهمًا من نقطة بدايـة المتجه $\vec{u}$ إلى نقطة نهاية المتجه $\vec{v}$، فينتـج المتجه $\vec{u}+\vec{v}$ وَفق قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

2) $2\vec{u}-\vec{v}$



الخطوة 1: أرسـم المتجه $2\vec{u}$ بنسخ المتجه $\vec{u}$، ثم لصق بدايته عند نهاية المتجه $\vec{u}$ الأوّل.

الخطوة 2: أعكس اتجاه المتجه $\vec{v}$، ثم أسحبه وحدة واحدة إلى الأعلى حتى تنطبق بدايته على نهاية المتجه $2\vec{u}$.

الخطوة 3: أرسـم سـهمًا من بداية المتجه $2\vec{u}$ إلى نهاية المتجه $-\vec{v}$، فينتج المتجه $2\vec{u}+(-\vec{v})$، أو المتجه $2\vec{u}-\vec{v}$.

جمع المتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية وطرحها وضربها في عدد حقيقي

إذا كان: $\vec{u}=\langle 3,-2\rangle$، وكان: $\vec{v}=\langle 6,9\rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

9 $\vec{u}+\vec{v}$

10 $\vec{v}-\vec{u}$

11 $3\vec{u}+2\vec{v}$

12 $-2\vec{u}+\vec{v}$

مثال: إذا كان: $\vec{m}=\langle 1,-3\rangle$، وكان: $\vec{n}=\langle -2,7\rangle$، فأجد $2\vec{m}+5\vec{n}$

$2\vec{m}+5\vec{n}=2\langle 1,-3\rangle+5\langle -2,7\rangle$	بالتعويض
$=\langle 2(1),2(-3)\rangle+\langle 5(-2),5(7)\rangle$	تعريف ضرب المتجه في عدد
$=\langle 2,-6\rangle+\langle -10,35\rangle$	بالتبسيط
$=\langle 2+(-10),-6+35\rangle$	تعريف جمع متجهين
$=\langle -8,29\rangle$	بالتبسيط

الوحدة 5: المتجهات

الضرب القياسي، والزاوية بين متجهين

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

13 $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, -5\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -1\rangle$

14 $\vec{\mathbf{m}} = \langle -3, -4\rangle,\ \vec{\mathbf{n}} = \langle 8, 6\rangle$

15 $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 4\rangle, \vec{\mathbf{s}} = \langle 2, 3\rangle$

16 $\vec{\mathbf{q}} = \langle 11, 8\rangle, \vec{\mathbf{p}} = \langle -4, -5\rangle$

أجد قياس الزاوية بين كل متجهين ممّا يأتي:

17 $\vec{\mathbf{a}} = \langle 3, 7\rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 5, 1\rangle$

18 $\vec{\mathbf{c}} = \langle 2, -3\rangle, \vec{\mathbf{d}} = \langle -6, 9\rangle$

19 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{a}} = \langle 3n-4, -10\rangle$، والمتجه: $\vec{\mathbf{b}} = \langle 4, n\rangle$ مُتعامِدين، فما قيمة n؟

مثال: أجد قياس الزاوية بين المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 3, -2\rangle$، والمتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -4, -3\rangle$.

صيغة قياس الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}| \times |\vec{\mathbf{v}}|}$$

تعريف الضرب القياسي، ومقدار المتجه

$$= \frac{3(-4)+(-2)(-3)}{\sqrt{3^2+(-2)^2} \times \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{-6}{\sqrt{13} \times \sqrt{25}} \approx -0.3328$$

تعريف معكوس جيب التمام

$$\theta \approx \cos^{-1}(-0.3328)$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 109.4^\circ$$

إذن، قياس الزاوية بين المتجهين هو: 109.4° تقريبًا.

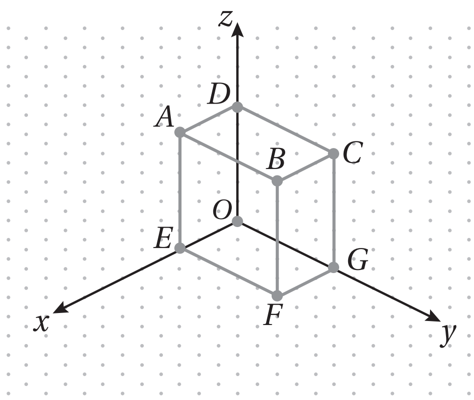
الدرس 1

المتجهات في الفضاء

Vectors in Space

أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1 $A(0, 2, -3)$ 2 $B(-1, 0, 4)$ 3 $C(2, 4, 3)$ 4 $D(-3, -2, -5)$



في متوازي المستطيلات المجاور، إذا كانت إحداثيات الرأس B هي: $(3, 5, 6)$، فأكتب إحداثيات كلٍّ ممّا يأتي:

5 الرأس A.
6 الرأس C.
7 الرأس D.
8 الرأس F.
9 مركز متوازي المستطيلات $ABCDOEFG$.

أكتب الصورة الإحداثية لكلٍّ من المتجهات الآتية، ثم أجد مقدار كلٍّ منها:

10 $\overrightarrow{AB}$، حيث: $A(-2, 5, 0), B(4, 9, -3)$.
11 $\overrightarrow{EF}$، حيث: $E(3, 4, 6), F(6, 8, -6)$.
12 $\overrightarrow{GH}$، حيث: $H(10, 7, 8), G(-2, 3, 2)$.

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

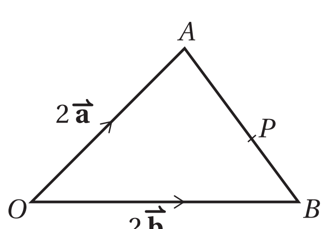
14 $\vec{\mathbf{v}} = \langle -5, 4, 20 \rangle$
13 $\overrightarrow{AC} = 8\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 3\sqrt{5}\,\hat{\mathbf{k}}$

15 أجد متجهًا له نفس اتجاه المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$، ومقداره 52.

إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 3, -6 \rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $3\vec{\mathbf{u}} - 2\vec{\mathbf{v}}$
16 $2\vec{\mathbf{u}} + 4\vec{\mathbf{v}}$

18 أجد قيمة كلٍّ من الأعداد الحقيقية: a، و b، و c التي تُحقِّق المعادلة الآتية: $a\vec{\mathbf{u}} + 5\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



19 في المثلث OAB المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB، حيث: $AP : PB = 5:3$. إذا كان: $\overrightarrow{OP} = k(3\vec{\mathbf{a}} + 5\vec{\mathbf{b}})$، فما قيمة العدد الحقيقي k؟

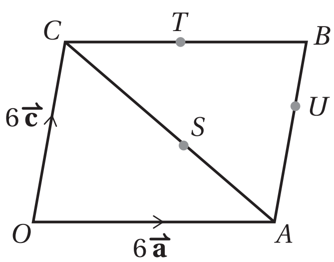
المتجهات في الفضاء
Vectors in Space

20 متجهـا الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -5, 4, -3\rangle$، و $\langle 4, -2, 0\rangle$ على الترتيب. أجد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$، علمًا بأنَّ: $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$.

21 $ABCD$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{AD} = \vec{\mathbf{b}}$، و $\overrightarrow{AC} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$، و $\overrightarrow{BD} = -6\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$. أجد كُلًّا من $\vec{\mathbf{b}}$، و $\vec{\mathbf{a}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

22 إذا كان: $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$، فأجد الأعداد الحقيقية: p, q, r التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$p\vec{\mathbf{a}} + q\vec{\mathbf{b}} + r\vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

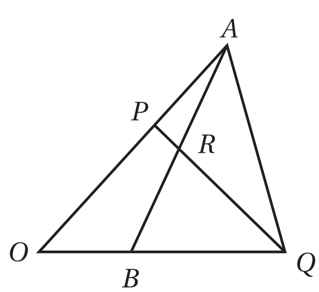


في الشـكل المجاور، $OABC$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{OA} = 6\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OC} = 6\vec{\mathbf{c}}$، والنقطة T هـي منتصف الضلع BC، والنقطة U تقع علـى الضلع AB، حيث: $AU : UB = 2 : 1$، والنقطة S تقع على القُطْر CA، حيث: $CS : SA = 3 : 2$.

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$:

26 $\overrightarrow{UT}$ 25 $\overrightarrow{OU}$ 24 $\overrightarrow{AC}$ 23 $\overrightarrow{OB}$

30 $\overrightarrow{SB}$ 29 $\overrightarrow{US}$ 28 $\overrightarrow{OS}$ 27 $\overrightarrow{TA}$



في المثلث OAQ المجاور، إذا كان $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}$، وكان $\overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$، وكانت $OP : OA = 3:5$، وكانت $OB : BQ = 1:2$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

31 إذا عُلِـم أنَّ $\overrightarrow{AR} = h\overrightarrow{AB}$، حيـث h عـدد حقيقـي، و $0 < h < 1$، فأُثبِـت أنَّ: $\overrightarrow{OR} = (1-h)\,\vec{\mathbf{a}} + h\vec{\mathbf{b}}$.

32 إذا عُلِم أنَّ $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$، حيث k عدد حقيقي، و $0 < k < 1$، فأكتب $\overrightarrow{OR}$ بدلالة k, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{a}}$.

33 أجد قيمة كلٍّ من h، و k.

34 أجد النسبة $\overrightarrow{PR} : \overrightarrow{PQ}$.

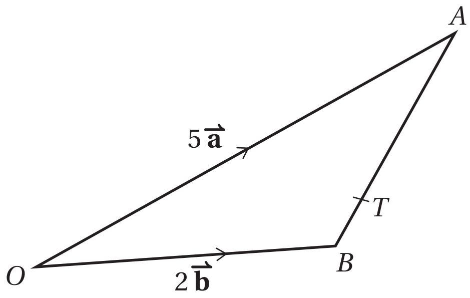
المستقيمات في الفضاء
Lines in Space

أُبيِّن إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ في الحالتين الآتيتين متوازي أضلاع أم لا، مُبرِّرًا إجابتي:

1 $A(3, -2, 1), B(-4, 0, 8), C(-6, 5, 5), D(8, 1, -9)$

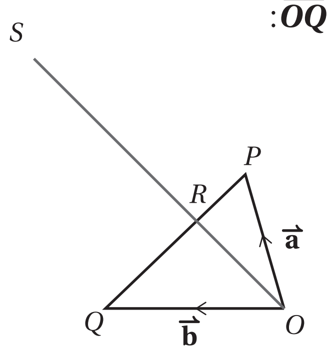
2 $A(12, 5, -8), B(6, 2, -10), C(-8, 1, 13), D(-2, 4, 15)$

3 إذا كانت: $A(2, 3, 1), B(6, 5, 4), C(3, 1, 5)$، وكان $ABCD$ متوازي أضلاع، فما إحداثيات D؟



4 في الشكل المجاور، OAB مثلث، فيه: $\overrightarrow{OA} = 5\vec{\mathbf{a}}$ و $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\mathbf{b}}$ والنقطة T تقع على الضلع AB، حيث: $AT : TB = 5 : 1$. أُبيِّن أنَّ $\overrightarrow{OT}$ يوازي $2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$

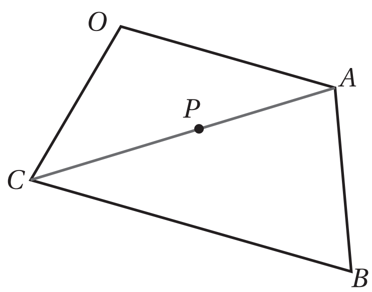
في الشكل المجاور، OPQ مثلث، فيه: $\overrightarrow{RQ} = 2\,\overrightarrow{PR}$ ، و $\overrightarrow{OS} = 3\,\overrightarrow{OR}$، و $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OQ} = \vec{\mathbf{b}}$:



5 أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{OS} = 2\,\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

6 أُضيفت النقطة T إلى الشكل، حيث: $\overrightarrow{OT} = -\vec{\mathbf{b}}$. أُثبِت أنَّ النقاط: S, P, T تقع على استقامة واحدة.

المستقيمات في الفضاء
Lines in Space



في الشكل الرباعي $OABC$ المجاور، $\overrightarrow{OA} = 8\,\vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OC} = 7\,\vec{\mathbf{c}}$، و $\overrightarrow{CB} = 12\,\vec{\mathbf{a}}$، والنقطة P تقسم $\overline{CA}$ بنسبة $3 : 2$

7 أجد المتجه $\overrightarrow{OP}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{c}}$.

8 أُثبِت أنَّ النقاط: O, P, B تقع على استقامة واحدة.

9 أجد النسبة: $OP : PB$.

10 أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$، ويمرُّ بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

11 أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 5, 8\rangle$، ويمرُّ بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $\langle 2, -7, 11\rangle$.

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

12 $(1, -7), (6, 19)$

13 $(-5, 4, 15), (7, 13, -8)$

14 $(5, 22, -8), (13, 10, 3)$

15 $(0, 2, -5), (9, 4, 6)$

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

16 هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l؟ أُبرِّر إجابتي.

17 إذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l، فأجد قيمة كلٍّ من b، و c.

18 ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz؟

المستقيمات في الفضاء
Lines in Space

19 إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, 2, 1\rangle + t\langle 4, a, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت:
$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 4, 3\rangle + u\langle 3, -2, -9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قيمة a التي تجعل $l_1 \parallel l_2$.

يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $U(p, -3, -1)$، و $V(2, 5, -3)$، وتقع النقطة $(7, 1, q)$ على l:

20 أجد قيمة p.

21 أكتب معادلة متجهة للمستقيم l.

22 أجد قيمة q.

23 إذا كانت $A(3, -2, 4)$، وكانت $B(6, 0, 3)$، وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 3, -2, 4\rangle + \lambda\langle 1, 2, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت النقطة D تقع على المستقيم l_1، حيث: $\lambda = 2$، فأجد معادلة متجهة للمستقيم l_2 الذي يمرُّ بالنقطة D، ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

أُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1، و l_2 متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

24 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 2, 1)$، و $(4, 3, 3)$، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 1, 1)$، و $(5, 1, 0)$.

25 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 3, 1)$، و $(3, 1, -2)$، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(11, 7, -3)$، و $(9, 6, -2)$.

26 يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $A(2, 1, 3)$، و $B(5, -2, 1)$. إذا وقعت النقطة C على المستقيم l، وكان $AC = 3CB$، فأجد جميع إحداثيات النقطة C المُمكِنة.

27 المستقيمات الآتية معادلاتها المتجهة هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$، و $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$، و $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

أُبيِّن أنَّ هذه المستقيمات تُكوِّن مثلثًا، ثم أجد أطوال أضلاعه.

الضرب القياسي
Scalar Product

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\vec{\mathbf{u}} = \langle 4, 5, -3\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -2, 3, -7\rangle$

2. $\vec{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. $\vec{\mathbf{m}} = 7\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 9\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$

4. إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 6, 5, a\rangle$ يُعامِد المتجه: $\vec{\mathbf{w}} = \langle 15, 24, -7\rangle$، فما قيمة a؟

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلٍّ ممّا يأتي:

5. $\vec{\mathbf{a}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$

6. $\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$

7. إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{a}} = \lambda\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ والمتجه: $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + \lambda\hat{\mathbf{k}}$ مُتعامِدين، فما قيمة (قِيَم) λ؟

8. إذا كانـــت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ معادلــة متجهــة للمســتقيم l_1، وكانـــت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ معادلــة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قياس الزاوية الحادَّة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عُشر درجة.

9. يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $(3, -5, 9)$، و $(-2, 11, 6)$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 3, 8)$، و $(-5, 9, 12)$. أجد قياس الزاوية الحادَّة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عُشر درجة.

10. إذا كان قياس الزاوية بين المتجه: $\langle v, 0, -1\rangle$ والمتجه: $\langle 2, -1, 0\rangle$ هو $60°$، فما قيمة v؟

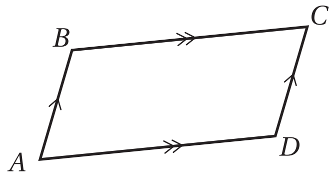
11. إذا كان: $A(3,-2, 6)$، وكان: $B(-5, 4, 1)$، فأجد مساحة المثلث AOB، حيث O نقطة الأصل.

الضرب القياسي
Scalar Product

إذا مَرَّ المستقيم l بالنقطتين: $E(-3, 7, 12)$، و $F(1, -3, 5)$، وكانت النقطة $G(0, -6, 4)$ لا تقع على المستقيم l، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l.

13 البُعْد بين النقطة G والمستقيم l.



14 يُبيِّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$، حيث:
$\overrightarrow{AB} = 6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 11\hat{\mathbf{k}}$، و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$.
أجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ p \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، والنقطة $A(9, -1, -14)$ تقع على المستقيم l_1، والنقطة C تقع على المستقيم l_2، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

15 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدين، فأجد قيمة q.

16 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فأجد قيمة p، وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

17 رُسِمت دائرة مركزها النقطة C، فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين: A، و B. أجد متجه الموقع للنقطة B.

الضرب القياسي
Scalar Product

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -19 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l، والنقطة $T(-2, 5, 8)$ تقع خارج المستقيم l، والنقطة F تقع على المستقيم l، حيث $\overrightarrow{TF}$ يُعامِد المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

18 أُبيِّن أنَّ قيمة t التي تعطي النقطة F على المستقيم l هي: $t = \frac{13a + 44}{a^2 + 10}$.

19 إذا كانت $t = 5$ في الفرع السابق، فأجد متجهي الموقع المُمكِنين للنقطة F.

إذا كانت: $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$، والمستقيم l يمرُّ بالنقطة A، وله المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$:

20 أُبيِّن أنَّ النقطة C تقع على المستقيم l.

21 أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B.

22 إذا وقعت النقطة D على المستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B، بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

23 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

24 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$.

الوحدة 6: الإحصاء والاحتمالات

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• إيجاد التوافيق

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\binom{10}{3}$ 2) $\binom{50}{1}$ 3) $\binom{100}{99}$ 4) $\binom{1000}{0}$ 5) $\binom{20}{20}$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) 5!

صيغة مضروب العدد $5! = 5(4)(3)(2)(1)$

بالتبسيط $= 120$

b) $\binom{7}{3}$

صيغة التوافيق $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!}$

صيغة مضروب العدد $= \frac{7(6)(5)4!}{3!\,4!}$

بالتبسيط $= \frac{7(6)(5)}{6}$

بالتبسيط $= 7(5) = 35$

• إيجاد التباديل

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

6) $P(10, 9)$ 7) $P(8, 0)$ 8) $P(7, 7)$ 9) $P(6, 1)$ 10) $P(5, 2)$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(9, 2)$

صيغة التباديل $P(9, 2) = \frac{9!}{(9-2)!}$

صيغة مضروب العدد $= \frac{9(8)7!}{7!}$

بالتبسيط $= 9(8) = 72$

b) $P(5, 2)$

صيغة التباديل $P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!}$

صيغة مضروب العدد $= \frac{5(4)3!}{3!}$

بالتبسيط $= 5(4) = 20$

المُتغيِّرات العشوائية، وتوزيعها الاحتمالي

أجد قِيَم المُتغيِّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي في كلٍّ ممّا يأتي:

11 في تجربة إلقاء قطعة نقد 4 مَرّات، دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات ظهور الصورة.

12 فـي تجربة اختيار 5 كرات على التوالي من دون إرجـاع من صندوق يحوي 3 كرات صفراء و4 كرات زرقاء، دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات الصفراء المسحوبة.

13 في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين معًا، دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على الفرق المُطلَق للعددين الظاهرين على حجري النرد.

مثال: **في تجربة إلقاء قطعة نقد 3 مَرّات متتالية، دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات ظهور الصورة مضروبًا في عدد مَرّات ظهور الكتابة:**

a) أجد قِيَم المُتغيِّر العشوائي X.

أفترض أنَّ H تعني صورة، وأنَّ T تعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

ناتج التجربة	TTT	HTT	THT	TTH	THH	HTH	HHT	HHH
عدد مَرّات ظهور الصورة	0	1	1	1	2	2	2	3
عدد مَرّات ظهور الكتابة	3	2	2	2	1	1	1	0
قِيَم x	0	2	2	2	2	2	2	0

إذن، قِيَم المُتغيِّر العشوائي X هي 2 ,0 فقط.

b) أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X.

لإيجاد التوزيع الاحتمالي، أجد كُلًّا من $P(X=0)$، و $P(X=2)$.

أُلاحِظ أنَّ القيمة: $X=0$ تنتج من الناتجين: $\{HHH, TTT\}$؛ أيْ إنَّ:

$$P(X=0) = P(\{HHH, TTT\}) = \frac{2}{8}$$

أمّا القيمة: $X=2$ فتنتج من النواتج: $\{HTT, THT, TTH, THH, HTH, HHT\}$؛ أيْ إنَّ:

$$P(X=2) = \frac{6}{8}$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X هو:

x	0	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$

إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لمجموعة من المشاهدات

أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لكل مجموعة مشاهدات ممّا يأتي:

14) $1, 1, 2, 3, 4, 5, 1, -1, -5, 3$

15) $-2, -3, -4, 5, 2, 1, 4, 5$

مثال: أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين للمشاهدات الآتية: **2, 4, 6, 8**.

- الوسط الحسابي هو مجموع المشاهدات مقسومًا على عددها.

إذن:

صيغة الوسط الحسابي $$\mu = \frac{\sum x}{n}$$

بالتعويض $$= \frac{2+4+6+8}{4}$$

بالتبسيط $$= 5$$

- الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\mu)^2}{n}}$.

إذن:

صيغة الانحراف المعياري $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\mu)^2}{n}}$$

بالتعويض $$= \sqrt{\frac{(2-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2}{4}}$$

بالتبسيط $$= \sqrt{\frac{9+1+1+9}{4}}$$

بالتبسيط $$= \sqrt{5}$$

- التباين هو مربع الانحراف المعياري.

إذن:

$$\sigma^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

إيجاد التوقُّع، والتباين، والانحراف المعياري

أجد التوقُّع، والتباين، والانحراف المعياري لكل توزيع احتمالي ممّا يأتي:

17

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.2	0.1	0.3	k

16

x	1	-1
$P(X=x)$	0.4	0.6

مثال: في ما يأتي التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية:

x	3	-5
$P(X=x)$	0.7	0.3

a) أجد التوقُّع $E(X)$.

صيغة التوقُّع: $E(X) = \sum x \cdot P(X=x)$

مجموع نواتج الضرب: $= 3(0.7)+(-5)(0.3)$

بالتبسيط: $= 0.6$

b) أجد التباين σ^2.

صيغة التباين: $\sigma^2 = \sum \left(x^2 \cdot P(x)\right) - \left(E(X)\right)^2$

بالتعويض: $= 3^2\,(0.7) + (-5)^2\,(0.3) - (0.6)^2$

بالتبسيط: $= 13.44$

c) أجد الانحراف المعياري σ.

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

إذن:

$$\sigma = \sqrt{13.44} \approx 3.67$$

التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدَّين
Geometric and Binomial Distributions

إذا كان: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1 $P(X=4)$
2 $P(X \leq 4)$
3 $P(X \geq 2)$
4 $P(3 \leq X \leq 7)$
5 $P(X<2)$
6 $P(X>5)$
7 $P(1<X<3)$
8 $P(4<X \leq 6)$

إذا كان: $X \sim B(5, 0.4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

9 $P(X=4)$
10 $P(X \geq 5)$
11 $P(X \leq 3)$
12 $P(3<X \leq 5)$
13 $P(X>2)$
14 $P(X<3)$
15 $P(2 \leq X<5)$
16 $P(5<X<8)$

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرين العشوائيين الآتيين:

17 $X \sim Geo(0.45)$
18 $X \sim Geo\left(\frac{2}{5}\right)$

أجد التوقُّع والتباين لكلٍّ من المُتغيِّرين العشوائيين الآتيين:

19 $X \sim B(10, 0.2)$
20 $X \sim B(150, 0.3)$

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارَّة أمام منزلها. إذا كان احتمال أنْ تكون أيُّ سيّارة تمرّ من أمام منزلها صفراء اللون هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

21 احتمال عدم مرور أيِّ سيّارة صفراء من بين أوَّل 5 سيّارات مرَّت أمام المنزل.

22 احتمال مرور أكثر من 3 سيّارات حتى شاهدت نور أوَّل سيّارة صفراء.

23 سدَّد لاعب كرة سلَّة 15 رمية نحو السلَّة. إذا كان احتمال تسجيله هدفًا في أيِّ رمية هو 10%، فأجد احتمال أنْ يُسجِّل هدفًا بـ 3 رميات فقط من بين 15 رمية.

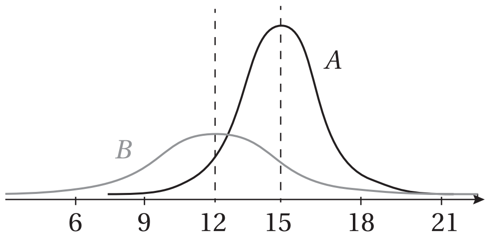
امتحانات: وجد مُعلِّم الرياضيات أنَّ 3 طلبة تقريبًا من بين كل 5 طلبة يحتاجون إلى استعمال أوراق إضافية في أثناء الامتحان. إذا تقدَّم للامتحان 30 طالبًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

24 احتمال أنْ يحتاج 10 طلبة إلى استعمال أوراق إضافية.

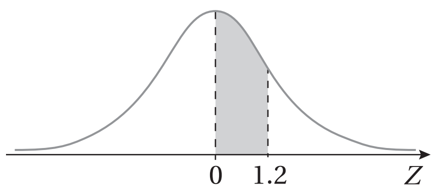
25 احتمال ألّا يحتاج أيٌّ من الطلبة إلى استعمال أوراق إضافية.

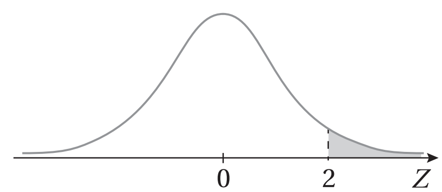
التوزيع الطبيعي
Normal Distribution

1 يُمثِّل كلٌّ من المنحنيين المجاورين توزيعًا طبيعيًّا. أُقارِن بين هذين التوزيعين من حيث قِيَم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

2


3


أجد القيمة المعيارية z التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

4 $P(Z < z) = 0.638$

5 $P(Z > z) = 0.6$

6 $P(0 < Z < z) = 0.45$

7 $P(-z < Z < z) = 0.8$

إذا كان: $X \sim N(30, 100)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

8 $P(X < 35)$

9 $P(X > 38.6)$

10 $P(X > 20)$

11 $P(35 < X < 40)$

12 $P(15 < X < 32)$

13 $P(17 < X < 19)$

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 30، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $P(X < x) = 0.3$

15 $P(X > x) = 0.6915$

16 $P(X < x) = 0.7516$

17 $P(X > x) = 0.05$

التوزيع الطبيعي
Normal Distribution

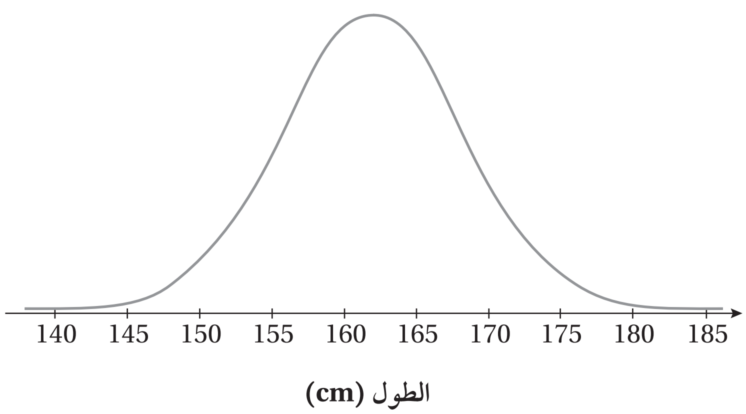
تعبئة: يُعبِّئ مصنع إنتاجه في حاويات مُتماثِلة تجهيزًا لشحنها، ويقيس كتل هذه الحاويات جميعًا للتحقُّق من صلاحيتها للشحن. إذا كانت كتل الحاويات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 1000 kg، وانحرافه المعياري 10 kg، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18 النسبة المئوية للحاويات التي تزيد كتلهاعلى 1020 kg.

19 النسبة المئوية للحاويات التي تتراوح كتلها بين 990 kg و 1010 kg.

20 نسبة الحاويات الصالحة للشحن إذا كانت كتلة الحاوية الصالحة للشحن لا تزيد على 1020 kg.

يدلُّ المُتغيِّر العشوائي X على أطوال طالبات الصف الثاني عشر (بالسنتيمتر) في إحدى المدارس، حيث: $X \sim N(162, 6.3^2)$. مُعتمِدًا الشكل الآتي الذي يُبيِّن منحنى التوزيع الطبيعي للأطوال، أُجيب عن الأسئلة الخمسة التالية تباعًا:



21 أُظلِّل المنطقة التي تُمثِّل: $P(X > 155)$.

22 إذا اختيرت إحدى هؤلاء الطالبات عشوائيًّا، فأجد احتمال أنْ يكون طولها أكثر من 155 cm

23 إذا اختيرت إحدى هؤلاء الطالبات عشوائيًّا، فأجد احتمال أنْ يكون طولها أكثر من 169 cm

أُحدِّد فترتين تقع في كلٍّ منهما تقريبًا النسبة المعطاة للطالبات ممّا يأتي:

24 50%

25 81.5%

ورقة مُنقَّطة متساوية القياس

ورقة مُنقَّطة متساوية القياس

ورقة مُنقَّطة متساوية القياس